جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
بیست و دومین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۸۳

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های کوتاه	چند گزینه‌ای
-	۶	-

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد**. توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

۱- در مثلث قائم‌الزاویه abc $\angle A = ۹۰^\circ$ نقطه‌ی D محل برخورد نیمساز داخلی زاویه‌ی A با ضلع BC و نقطه‌ی I_a مرکز دایره‌ی محاطی خارجی نظیر زاویه‌ی A است. (I_a محل برخورد نیمسازهای زوایای خارجی B و C است) ثابت کنید:

$$\frac{AD}{DI_a} \leq \sqrt{۲} - ۱$$

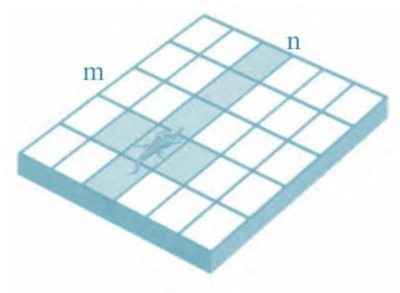
۲- فرض کنید $f : [۰, \infty) \to \mathbb{R}$ دارای این خاصیت است که $f(x) - ۳x$ و $f(x) - x^۳$ توابعی صعودی‌اند. نشان دهید $f(x) - x^۲ - x$ نیز صعودی است. (تابع g را صعودی گوییم هرگاه اگر $x \leq y$ آنگاه $g(x) \leq g(y)$).

۳- وزارت راه مرمت ۲۴۰۰ جاده را به ۸۰ شرکت خصوصی واگذار کرده است. این جاده‌ها ۱۰۰ شهر را به یکدیگر متصل می‌کنند. هر جاده بین دو شهر است و بین هر دو شهر حداکثر یک جاده کشیده شده است. می‌دانیم هر شرکت وظیفه‌ی مرمت ۳۰ جاده از بین آن‌هایی که در هر دو سرش نمایندگی دارد را به عهده گرفته است. نشان دهید شهری وجود دارد که حداقل ۸ شرکت در آن نمایندگی دارند.

۴- همه‌ی توابع $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را بیابید که برای هر m و n طبیعی، $m + n$ بر $f(m) + f(n)$ بخش‌پذیر باشد.

۵- نیمساز داخلی زاویه‌ی $\angle A$ از مثلث ABC، ضلع BC و دایره‌ی محیطی مثلث ABC را به ترتیب در D و M قطع می‌کند. خطی گذرنده از نقطه‌ی D دایره‌ی به مرکز M و شعاع MB را در X و Y قطع کرده است. ثابت کنید خط AD زاویه‌ی $\angle XAY$ را نصف می‌کند.

۶- مهره‌ی تمساح در جدول $m \times n$ $(m \geq ۴)$ می‌تواند همه‌ی خانه‌های هم ستون خودش و همین‌طور خانه‌های مجاور هم‌سطرش را تهدید کند. حداقل چه تعداد مهره‌ی تمساح لازم است در جدول گذاشته شود تا هر خانه‌ی دست‌کم توسط یک تمساح تهدید شود؟ (توجه کنید که تمساح‌ها باید عمودی باشند.)



راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۸۳

۱- BI نیم‌ساز زاویه‌ی B است، بنا بر قضیه‌ی نیمسازها داریم:

$$\frac{DI}{IA}=\frac{BD}{AB},\ \frac{DI}{IA}=\frac{I_aD}{I_aA}$$

درنتیجه داریم:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{I_aA}{I_aD}=\frac{AD}{I_aD}+۱$$

بنابراین کافی است نشان دهیم $\frac{\sqrt{۲}}{۲}\ge\frac{BD}{AB}$ داریم،

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin(۴۵^\circ)=\frac{BH}{AB}\le\frac{BD}{AB}$$

که در آن H پای عمود وارد از B بر AD می‌باشد و در نتیجه طول آن از طول BD بیش‌تر نیست، بنابراین حکم ثابت می‌شود.

۲- فرض کنید $x\le y$، باید نشان دهیم $f(x)-x^۲-x\le f(y)-y^۲-y$. بنا بر فرضیات مسئله‌ی داریم:

$$f(x)-۳x\le f(y)-۳y \quad و \quad f(x)-x^۳\le f(y)-y^۳$$

پس

$$f(y)-f(x)\ge ۳y-۳x,\ \ f(y)-f(x)\ge y^۳-x^۳$$

حال اگر نشان دهیم $f(y)-f(x)\ge y^۲+y-x-x^۲$، حکم ثابت می‌شود. برای این کار کافی است نشان دهیم $y^۲+y-x-x^۲$ از حداقل یکی از دو عبارت $۳y-۳x$ و $y^۳-x^۳$ کوچک‌تر یا مساوی است، فرض کنید مطلب اخیر درست نباشد، در این صورت

$$y^۲+y-x^۲-x>۳y-۳x\ \ ,\ \ y^۲+y-x^۲-x>y^۳-x^۳$$

پس

$$(y-x)(y+x+۱)>۳(y-x)\ \ ,\ \ (y-x)(y+x+۱)>(y-x)(y^+xy+x^۲)$$

که با توجه به مثبت بودن $y-x$ داریم:

$$x+y+۱>۳\ \ ,y+x+۱>y^۳+xy+x^۲$$

اگر بگیریم $S=x+y$ و $P=xy$، نتایج بالا به شکل زیر درمی‌آیند:

$$S>۲\ \ ,\ \ S+۱>S^۲-P$$

از طرفی با استفاده از نامساوی حسابی هندسی می‌توان دید که $\frac{S^۲}{۴}\ge P$، با استفاده از این رابطه و دو رابطه بالا داریم:

$$S+\frac{S^۲}{۴}+۱>S+P+۱>S^۲$$

درنتیجه $۳S^۲-۴S-۴<۰$ که این مطلب با توجه به این‌که $S>۲$ غلط می‌باشد. تناقض حاصل نشان می‌دهد $y^۲+y-x^۲-x$ از حداقل یکی از دو عبارت $۳y-۳x$ و یا $y^۳-x^۲$ کمتر یا مساوی است و این مطلب حکم را ثابت می‌کند.

۳- در صورت مسئله‌ی باید یک تصحیح به این شکل انجام شود که «هر شرکت وظیفه‌ی مرمت ۳۰ جاده از بین آن‌هایی که در هر دو سرش نمایندگی را به عهده گرفته است.» حال به حل مسئله‌ی می‌پردازیم. اگر فرض کنیم یک شرکت در n شهر نمایندگی دارد، آنگاه حداکثر $\binom{n}{۲}$ جاده را می‌تواند مرمت کند. بنابراین باید داشته باشیم، $\binom{n}{۲} \geq ۳۰$، که این رابطه نشان می‌دهد $n \geq ۹$، یعنی هر شرکت حداقل در ۹ شهر نمایندگی دارد.

بنابراین حداقل $۹ \times ۸۰ = ۷۲۰$ نمایندگی در شهرها وجود دارد، پس شهری وجود دارد که در آن حداقل $\left[\frac{۷۲۰}{۱۰۰}\right] = ۸$ نمایندگی وجود دارد.

۴- اگر قرار دهیم $m = n$، داریم $۲f(n) \mid ۲n$ پس $f(n) \mid n$. درنتیجه به ازای هر عدد طبیعی n باید $f(n) \leq n$. حال فرض کنید m عدد طبیعی دلخواهی باشد، در این صورت چون تعداد اعداد اول نامتناهی است پس عدد اول $P > m$ وجود دارد، حال به جای n در رابطه اصلی $P - m$ را قرار می‌دهیم. در این صورت داریم:

$$f(m) + f(P-m) \mid P \Rightarrow f(m) + f(P-m) = P$$

اما چون $f(m) \leq m$ و $f(P-m) \leq P-m$ پس با توجه به رابطه‌ی بالا در هر دو نامساوی اخیر تساوی برقرار است. پس $f(m) = m$ برای هر عدد طبیعی برقرار است. این مطلب نشان می‌دهد که تنها تابع موردنظر تابع همانی است.

۵- در مسئله‌ی چهار نقطه‌ی B، C، X و Y روی یک دایره‌ی قرار دارند. (توجه کنید که چون AD نیم‌ساز است، پس دو کمان MB و MC روی دایره‌ی محیطی با هم برابر هستند، در نتیجه $MB = MC$. پس دایره‌ی به مرکز M و شعاع MB از C هم می‌گذرد.)

پس داریم:

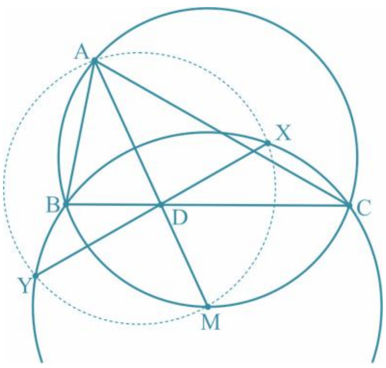
$$BD \times DC = DX \times DY$$

از طرفی چهار نقطه‌ی A، B، C و M نیز روی دایره‌ی محیطی قرار دارند. پس

$$AD \times DM = BD \times DC$$

با استفاده از روابط فوق داریم:

$$AD \times DM = DX \times DY$$



پس چهارضلعی $AXMY$ محاطی است، در نتیجه $\angle YXM = \angle YAM$، $\angle XYM = \angle XAM$ با توجه به روابط اخیر و این‌که مثلث XYM متساوی‌الساقین است (M مرکز دایره‌ای است که از X و Y می‌گذرد.) داریم $\angle YAM = \angle MAX$ که همان حکم مسئله‌ی می‌باشد.

۶- اگر در هر ستون یک مهره‌ی تمساح قرار دهیم تمام خانه‌ها تهدید می‌شوند، یعنی با n تمساح تمام صفحه‌ی تهدید می‌شود. نشان می‌دهیم که این کار با کم‌تر از n تمساح امکان‌پذیر نیست. فرض کنید a_i $(۱ \leq i \leq n)$ نشان‌دهنده‌ی تعداد تمساح‌ها در ستون iام باشد. اگر تعداد مهره‌ها در ستون‌های $i_۱$، $i_۲$ ... و i_k صفر باشد، باید داشته باشیم:

$\alpha_{i_1-1}+\alpha_{i_1+1}\geq m$
$\alpha_{i_2-1}+\alpha_{i_2+1}\geq m$
.
.
.
$\alpha_{i_k-1}+\alpha_{i_k+1}\geq m$ $\alpha_{i_1-1}+\alpha_{i_1+1}\geq m$
$\alpha_{i_1-1}+\alpha_{i_1+1}\geq m$

دلیل این مطلب این است که اگر در یک ستون تعداد مهره‌ها صفر باشد چون هرکدام از خانه‌های این ستون باید تهدید شود، باید در دو ستون مجاور آن حداقل $m-$ تمساح وجود داشته باشد. (اگر ستون اول و یا آخر مهره‌ی نداشته باشد تنها یک ستون مجاور دارد و باید در همه‌ی خانه‌های آن ستون تمساح باشد.) اگر همه‌ی این نامساوی‌ها را جمع کنیم، نتیجه می‌شود جمع همه‌ی آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی mk است. پس حداقل یکی از نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_{i_j}-1\geq\frac{mk}{2},\sum_{j=1}^{k}\alpha_{i_j+1}\geq\frac{mk}{2}$$

(منظور از α_0 و یا α_{n+1} در صورت نیاز صفر است.)

بنابراین k تا از α_iها موجود هستند که مجموع آن‌ها بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{mk}{2}$ است. (توجه کنید که اگر ستون اول یا آخر تعداد مهره‌هایش صفر باشد، آنگاه ممکن است که $k-1$ تا از α_iها مجموعشان بزرگ‌تر یا مساوی $\frac{mk}{2}$ باشد که این مطلب در تخمین ما بهتر خواهد بود.)

حال در عبارت $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$ که نشان‌دهنده تعداد مهره‌ها است، k جمله برابر صفر است و مجموع حداکثر k جمله دیگر حداقل $\frac{mk}{2}$ است و $n-2k$ جمله‌ی دیگر هم هرکدام حداقل یک هستند. پس

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\geq\frac{mk}{2}+(n-2k)$$

چون $m\geq 4$، داریم $\frac{mk}{2}\geq 2k$ پس

$$\frac{mk}{2}+(n-2k)\geq n$$

بنابراین حداقل به m تمساح نیاز داریم و این مطلب اثبات را تمام می‌کند.